GdT Borel

G = gpe réd. conn. $/\mathbb{Q}$, semi-simple (pour simplifier)

$X = {}^{G(\mathbb{R})}/_K$ $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ gpe arith.

$$j^q : I_{G(\mathbb{R})}^{\Gamma, q} \longrightarrow H^q_{dR}(X/\Gamma)$$

$\uparrow$

formes diff. $G(\mathbb{R})^\circ$ − invariantes sur X (donc sur X/Γ)

On va mq j^q est un iso pour $q \leq cste(G)$ "non triviale"

On a besoin de formes diff. L^2

I) Formes différentielles à croissance logarithmique

P parabolique $(/\mathbb{Q})$ de G, $x \in X$

$$\mu_x : A_P \times \underbrace{({}^\circ P(\mathbb{R}) \cap K)}_{K_P} \backslash {}^\circ P(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} X$$

$A_P \simeq \mathbb{R}^s_{>0}$ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} = \Delta \setminus I(P)$

$a \mapsto (a^{\alpha_1}, \dots, a^{\alpha_s})$

$(\omega^i)_i$ "repère mobile" (base de Ω^1_X sur $\mathcal{C}^\infty_X$)

$i \leq s$: $\omega^i = \dfrac{d\alpha_i}{\alpha_i}$

$J \subset \{1, \dots\}$ $\omega^J := \bigwedge_{i \in J} \omega^i$

q-forme σ s'écrit $\sum_{J \text{ de card. } q} f_J \, \omega^J$

$A_{P,(t)} = \{a \in A_P \mid \forall i, \ a^{\alpha_i} < t\}$

t suffisamment petit, $A_{P,t} \times K_P \backslash {}^{\circ}P(\mathbb{R}) / \Gamma_P \hookrightarrow X/\Gamma$

$\Gamma_P := \Gamma \cap P(\mathbb{Q})$.

Domaines de Siegel : $A_{P,t} \times \omega$ ω ouvert rel. compact de $K_P \backslash {}^{\circ}P(\mathbb{R})$

Croissance logarithmique : $\sigma = \sum_J f_J \, \omega^J$

sur un domaine de Siegel a croissance log.

si il existe $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_s]$

tq $\forall J$, $\forall y \in W$, $|f_J(a, \mathfrak{z})| \leq |P(\log a^{\alpha_1}, \dots, \log a^{\alpha_s})|$

Rmq: cela implique $\forall \varepsilon > 0$,

$$|f_J(a, -)| \leq C^{te} \times a^{-\varepsilon \sum_i \alpha_i}$$

On faisceautise cette définition :

$$\Omega^q_{X/\Gamma}[\log](V) = \{ \sigma \in \Omega^q_{X/\Gamma}(V \cap X/\Gamma)$$

ouvert de $\overline{X/\Gamma}$

$\forall y \in V$, $\exists$ voisinage spécial de y dans V sur lequel σ est à croissance log. et $d\sigma$ $\}$

Rmq: $\forall q$, $I^{\Gamma, q}_{G(\mathbb{R})} \subset \Omega^q_{X/\Gamma}[\log](\overline{X/\Gamma})$

[exp. de Joaquin : dans ce cas f_J sont bornées
et $\hat{m}$ $|\cdot| \leq C^{te} \times a^{\alpha(J)}$]

P parabolique de G, $\lambda \in X(A_P)$, q entier
on définit la condition :

$c(P,q,\lambda)$: $\forall$ poids ν de A_P dans $\bigoplus_{i \leq q} \Lambda^i \operatorname{Lie} U_P(\mathbb{R})$
$$\rho_P + \lambda - \nu \gg 0$$

si Q parabolique de G et $\exists\, g \in G(\mathbb{Q})$ tq
$g^{-1} P g \subset Q$, alors $\mathrm{Ad}(g)$ induit
$r_{QP} : X(A_P) \longrightarrow X(A_Q)$

On a $r_{QP}(\rho_P) = \rho_Q$, $\Phi_Q \subset r_{QP}(\Phi_P) \subset \Phi_Q \cup \{0\}$

Pour $\beta \in \Phi_Q$, $\dim u_\beta = \displaystyle\sum_{\delta \in \Phi_P \cap r_{QP}^{-1}(\{\beta\})} \dim u_\delta$

On voit ainsi que $c(P,q,\lambda) \Rightarrow c(Q,q,r_{QP}(\lambda))$

Soit P_0 parabolique minimal. $\lambda \in X(A_{P_0})$

$$c(G,\lambda) := \max\{ q \mid \underset{\text{vérifié}}{c(P_0, q, \lambda)} \}$$

$$c(G) := c(G, 0).$$

+ critère donné par Joaquin

+ le fait que $c(G,\lambda)$ est ouverte en λ

$\Rightarrow$ si $\sigma \in \Omega^q_{X/\Gamma}[\log](V)$ V ouvert de $\bar{X}/\Gamma$

et si $q \leq c(G)$

alors σ et $d\sigma$ sont localement L^2 (sur $\bar{X}/\Gamma$)

Comme $\bar{X}/\Gamma$ est compact, $\forall q \leq c(G)$

$$C^q := \Omega^q_{X/\Gamma}[\log](\bar{X}/\Gamma) \subset \Omega^q_{X/\Gamma,(2)}$$

Thm :

$$\Omega^\bullet_{\overline{X}/\Gamma}(\overline{X}/\Gamma) \xrightarrow{qis} \Omega^\bullet_{X/\Gamma}[\log](\overline{X}/\Gamma) \xrightarrow{qis} \Omega^\bullet_{X/\Gamma}(X/\Gamma)$$

en particulier $H^\bullet(\Omega^\bullet_{X/\Gamma}[\log](\overline{X}/\Gamma)) \simeq H^\bullet_{dR}(X/\Gamma) \simeq H^\bullet(\Gamma)$

preuve : notons $J : X/\Gamma \hookrightarrow \overline{X}/\Gamma$.

Pour chacun des 3 complexes de faisceaux $?^\bullet$

$\Omega^\bullet_{\overline{X}/\Gamma}$, $\Omega^\bullet_{X/\Gamma}[\log]$, $J_* \Omega^\bullet_{X/\Gamma}$

on va mq : $\underline{\mathbb{R}} \to ?^\bullet$ est un qis (étape 1)

faisceau constant sur $\overline{X}/\Gamma$

et que $\forall q$, $?^q$ est acyclique. (étape 2)

étape 1 : Lemme de Poincaré.

pour $\Omega^\bullet_{\overline{X}/\Gamma}$, lemme de Poincaré habituel cas de $\Omega^{\cdot}_{X/\Gamma}[\log]$: $y \in \bar{X}/_{\Gamma}$ $y \in e'(P)$

on se donne un voisinage spécial $A_{P,(t)} \times W = U$
on choisit les coord. comme suit :

· quitte à prendre W plus petit, OPS $W \simeq]-1,1[^{\cdots}$
(coordonnées $x^{s+1}, \dots$)

· $1 \leq i \leq s$, $x^i = \log(a^{\alpha_i}) - \log(t_0)$
$0 < t_0 < t$ de sorte que $x^i \in]-\infty, \underbrace{\log \frac{t}{t_0}}_{>0}[$

on est sur un domaine étoilé en 0

<u>rmq</u> : $dx^i = \omega^i$ pour $i \leq s$

pour $i > s$, dx^i sont comb. lin. à coeff des f^{ns} C^∞ (bornées) des ω^i et vice-versa.

la condition de croissance log. devient,
pour $\sigma = \sum_J b_J dx^J$: $|b_J(x)| \leq |P(x^1, \dots, x^s)|$

On introduit $A : \Omega^q(\mathcal{U}) \to \Omega^{q-1}(\mathcal{U})$

$$f_J \, dx^J \mapsto \sum_{\substack{I \subset J \\ |I| = q-1}} g_I \, dx^I$$

si $J = \{j_1 < \dots < j_q\}$, $I = J \setminus \{j_i\}$

$$g_I(x) := (-1)^{i-1} x^{j_i} \int_0^1 f_J(tx) \, t^{q-1} \, dt$$

qui satisfait $dA + Ad = \mathrm{Id}_{\Omega^q(\mathcal{U})}$

$\rightsquigarrow$ si $d\sigma = 0$, $d(A(\sigma)) = \sigma$

σ à croissance log $\Rightarrow$ $A(\sigma)$ aussi

Cela montre l'exactitude en $q > 0$.

$q = 0$: en tout point de $\overline{X/\Gamma}$, $\exists$ voisinage V

tq $V \cap X/\Gamma$ connexe

$\rightsquigarrow$ $\ker \Omega^0_{X/\Gamma}[\log] \xrightarrow{d} \Omega^1_{X/\Gamma}[\log] = \underline{\mathbb{R}}$

idem pour $J_* \Omega^\bullet_{X/\Gamma}$

Étape 2 : acyclicité. On montre que tous les faisceaux sont mous. Il suffit de vérifier que ce sont des $\Omega^0_{\overline{X/\Gamma}}$-modules car ce dernier est un faisceau d'anneaux mou.

Pour $\Omega^{\cdot}_{\bar{X}/\Gamma}$ et $J_*\Omega^{\cdot}_{X/\Gamma}$, évident.

Pour $\Omega^{\cdot}_{X/\Gamma}[\log]$, la cond. de croissance est préservée par mult. par $f \in \Omega^{0}_{\bar{X}/\Gamma}$:

- pour $f\sigma$, c'est clair
- $d(f\sigma) = \underbrace{df \wedge \sigma}_{} + f\, d\sigma$

$df \in \Omega^1_{\bar{X}/\Gamma}$ est comb. lin. $/\Omega^0_{\bar{X}/\Gamma}$ des $d\alpha_i = \alpha_i \omega^i$

$\square$